

利用天琴研究引力与黑洞本质*

张建东¹, 包佳慧², 胡一鸣¹, 纪沐婕¹,
石常富¹, 谢宁¹, 訾铁光¹, 梅健伟¹

1. “天琴计划”教育部重点实验室, 中山大学天琴中心 & 物理与天文学院, 天琴前沿科学中心, 国家航天局引力波研究中心, 广东 珠海 519082
2. 冲绳科学技术大学院大学, 日本 冲绳 951-8073

摘要: 空间引力波探测器的一个重要研究目标, 是利用引力波信号对物理学的基本理论进行研究。具体而言, 主要是研究引力与黑洞的本质。前者主要是检验引力理论是否符合广义相对论, 后者则是检验探测到的辐射引力波的致密天体是否为广义相对论中所预言的克尔黑洞。天琴作为一个空间引力波探测器, 将能够探测到大量不同类型的引力波源所发出的信号。利用这些各不相同的信号, 我们将有望从各个可能的方面对引力与黑洞的本质进行研究。在本文中, 我们将对天琴所采用的研究引力与黑洞本质的方法进行介绍, 并对预期中天琴所能达到的探测精度进行分析。

关键词: 引力波; 广义相对论; 黑洞

中图分类号: O412.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2021) 01-0074-12

Probing the nature of gravity and black hole with TianQin

ZHANG Jiandong¹, BAO Jiahui², HU Yiming¹, JI Mujie¹,
SHI Changfu¹, XIE Ning¹, ZI Tieguaung¹, MEI Jianwei¹

1. MOE Key Laboratory of TianQin Mission, TianQin Research Center for Gravitational Physics & School of Physics and Astronomy, Frontiers Science Center for TianQin, CNSA Research Center for Gravitational Waves, Sun Yat-sen University (Zhuhai Campus), Zhuhai 519082, China
2. Okinawa Institute of Science and Technology Graduate University, Okinawa 951-8073, Japan

Abstract: An important objective of space borne gravitational wave detectors is using gravitational wave signals to probe the fundamental theories of physics. Specifically, it means the study of the nature of gravity and black holes. The former objective is to test whether the gravitational theory is general relativity or not, and the latter one is to test whether the detected compact objects radiating gravitational waves is the Kerr black hole predicted in general relativity. As a space borne gravitational wave detector, TianQin may detect a lot of signals from many different kinds of gravitational wave sources. Using these signals, we expect to probe the nature of gravity and black holes from all possible aspects. In this article, we will introduce the methods that TianQin would use to probe the nature of gravity and black holes, and analyze the expected detection accuracy of TianQin.

Key words: gravitational wave; general relativity; black hole

* 收稿日期: 2020-11-09 录用日期: 2020-11-14 网络首发日期: 2021-01-18
基金项目: 广东省基础与应用基础重大项目 (2019B030302001); 国家自然科学基金 (11805286, 11703098)
作者简介: 张建东 (1990年生), 男; 研究方向: 引力理论、黑洞物理、引力波; E-mail: zhangjd9@mail.sysu.edu.cn

1 引言

自从广义相对论所预言的引力波于 2015 年 9 月 14 日首次被 LIGO 探测到以来^[1], 人们已经利用地面引力波探测器在 10 Hz ~ 1 kHz 频段探测到了大量以双黑洞为主的致密双星并合事件。目前 LVC 合作组已经进行了 O1、O2、O3 三次科学运行, 并公布了 GWTC-1^[2] 和 GWTC-2^[3] 两个引力波暂现源表 (Gravitational-Wave Transient Catalog), 分别包含 10 例双黑洞并合和 1 例已观测到其电磁对应体的双中子星并合, 以及 39 例由中子星或黑洞组成的双星系统的并合。最近, 针对 nHz 频段的脉冲星计时阵列, NANOGrav 也报告了随机引力波背景的疑似信号^[4]。而两个频段之间的 mHz 频段的空

间引力波探测器则尚在计划之中^[5-6], 均计划在 21 世纪 30 年代发射运行。其中, 我国自主提出的天琴计划^[7], 以三颗轨道高度为 10 万公里的无拖曳卫星构成臂长约 17 万公里的等边三角形星座, 通过星间激光干涉探测 0.1 mHz~1 Hz 频段的引力波信号。

在这个频段内, 空间引力波探测器可能探测到来自于各种不同的引力波源的信号, 主要包括以下几类: 最终会在地面探测器的频段内并合的恒星质量双黑洞在并合前几年的旋近过程; 大质量双黑洞的旋近和并合过程; 恒星质量的致密天体在距离大质量黑洞非常近的地方绕转的极端质量比旋近过程; 银河系内的双白矮星以几乎不变的频率互相绕转的过程; 以及以上这些源中无法被单独识别的信号所构成的随机引力波背景或前景。此外, 空间引力波探测器还有可能探测到的宇宙弦所产生的引力波, 以及宇宙极早期相变过程中所产生的引力波, 和宇宙暴涨阶段所产生的原初引力波, 甚至是从未有人预期过的未知过程所发出的引力波信号。

引力波的波形依赖于相应的基础理论, 因此通过对引力波信号进行分析, 就可以在相应的精度下检验基础理论。检验基础理论是一个非常宽泛的概念, 在不同的文章中, 其所包含的内容各不相同。比如, 利用双中子星并合的引力波信号及其电磁对应体进行多信使联合观测, 我们就可以对其物态方程进行研究, 对中子星的构成及其内部结构有更加深刻的理解, 还可以进一步筛选排除诸如夸克星、玻色星等等各种奇异致密星的模型。而通过探测宇宙弦或者相变过程的引力波, 也可以让我们对宇宙极早期的演化历史进行更加

深入的研究。此外还可以利用引力波信号去研究暗物质与暗能量等。而在本文中, 我们将不会去讨论这些内容, 而是将重点放在利用引力波研究引力和黑洞的本质这两个方面, 介绍利用天琴所能采用的研究方法和预期可能得到的结果。目前 LIGO 已经利用现有的引力波信号进行了相关的检验^[8-9], 并且在误差范围内都没有发现与理论不符的迹象。不过有些检验的精度还并不高, 未来的空间引力波探测器可以在不同的频段上探测到更多的事件, 因此将有望显著提升检验的精度。

在第 2 章中, 我们首先将对标准的引力理论和黑洞模型进行介绍, 然后再介绍可能的替代理论及其在物理性质和效应上的不同之处。在第 3 章中, 我们将针对天琴所能开展的研究进行介绍, 并对天琴预期在相应研究中所能得到的结果进行简要的分析。在第 4 章中, 我们将进行总结并简单地介绍后续可能开展的工作。

2 引力与黑洞的本质

当前的主流观点认为, 引力是时空弯曲的体现, 广义相对论则是描述引力的理论。而在广义相对论中, 爱因斯坦场方程的真空解就是黑洞, 通常由视界和被视界包裹的奇点构成。宇宙中的黑洞通常由大质量的恒星演化到末期时坍缩而成, 而质量较小的恒星则会演化成白矮星或中子星这类由简并压来抵抗引力的致密星。

不过, 人们也提出了很多替代理论以解释各种实验和理论中的问题, 因此对这些理论进行检验是非常重要的一个工作。我们将从引力和黑洞两个方面来介绍目前存在的替代理论及其现象。

2.1 广义相对论与修改引力理论

广义相对论自 1915 年被爱因斯坦提出以来, 就经受了大量的实验检验, 并且在误差范围内还没有观察到偏离广义相对论预言的现象。同时, Lovelock 在 1971 年证明了 Lovelock 定理, 指出只包含度规张量的二阶导数的广义协变四维引力理论只能是广义相对论^[10]。

1916 年爱因斯坦就提出了引力波存在的可能性, 但关于其本质的认识经历了长期的过程。出于理论和实验上各种不同的原因, 人们陆续提出了多种不同的修改引力理论, 用于解释广义相对论所面临的某些问题。而在这些修改引力理论中, 也会存在引力波, 而且其波形会和广义相对论的预言存在差别。因此我们通过探测引力波信号,

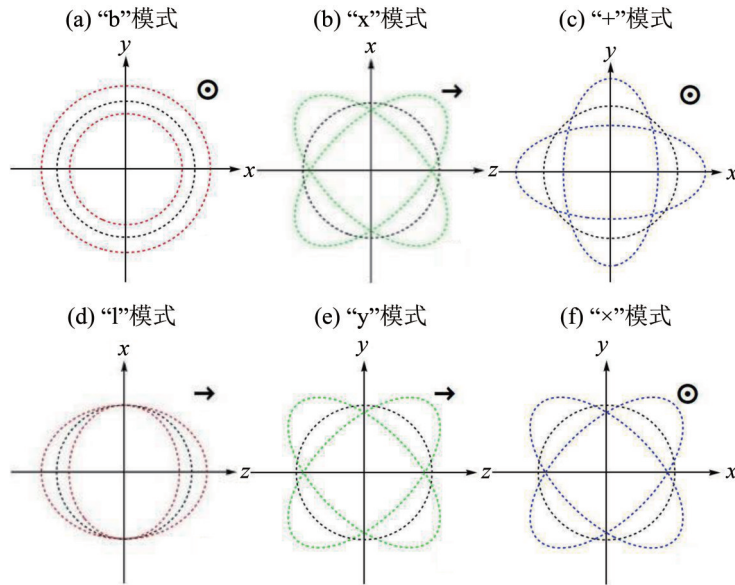


图 1 引力波的六种偏振模式

Fig. 1 Six polarization mode for gravitational wave

导致引力波在传播过程中也会受到影响。因此即使在产生时波形相同,但是在引力波信号抵达探测器的時候,所表现出的形式也会有差别。

其中最主要的一个影响是在引力子具有质量的情况。广义相对论中引力子的质量为零,所以引力波传播速度为光速,沿着类光测地线运动。而当引力子具有非零质量时,引力波就会沿着类时测地线运动。同时,不同频率的引力波的传播速度也不同,发生色散^[23]。

由于色散的存在,高频的部分传播速度更快,而低频的部分传播速度更慢。一般而言,双星系统辐射的引力波频率会逐渐升高,形成所谓的啁啾信号。因此观测到的引力波的波形也会发生变化。

2.2 黑洞无毛定理

黑洞是广义相对论的重要预言,是爱因斯坦场方程的真空解。在广义相对论提出的当年,史瓦西就给出了球对称情况下的真空解,度规为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

其中 M 是黑洞的质量。然而,由于场方程高度非线性的特点,直到 1962 年,克尔才得到了旋转黑洞解,其度规为

$$ds^2 = \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \frac{\Delta}{\Sigma}(dt - a\sin^2\theta d\varphi)^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}[(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2,$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr, \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta,$$

其中角动量为 $J = Ma$ 。更一般地,还有与电磁场耦合从而带有电荷的无转动的 R-N 黑洞解,和同时具有电荷和转动的克尔-纽曼黑洞解。

随后人们陆续证明了在特定的条件下,这些解是广义相对论中唯一可能的黑洞解。惠勒将这一猜想总结为黑洞无毛定理^[24],认为广义相对论中所有黑洞都可以由其质量、电荷、角动量三个参数所唯一确定。实际中,由于各种不同的机制,带有电荷的黑洞会迅速损失电荷,最终变成接近电中性的克尔黑洞,一般认为其电荷与质量之比不会超过 10^{-4} 。同时,由于坍缩为黑洞的恒星通常都具有自转,以及黑洞在吸积物质时会获得角动量,所以通常黑洞并不会是自转角动量严格为零的史瓦西黑洞。因此,我们可以认为真实的宇宙中存在的黑洞都是克尔黑洞,也就是说其所有性质都可以完全由质量和角动量这两个参数所决定。从这个意义来说,黑洞是宇宙中最简单的物体。

2.2.1 奇异致密星与非克尔黑洞解 彭罗斯证明的奇点定理指出,奇点的形成是无法避免的。当恒星演化的晚期,中心核反应的辐射压无法抵抗引力的时候,就会发生坍缩。根据其质量的不同,最终可能会形成由简并压来抵抗引力的白矮星、中子星。白矮星和中子星都存在各自的质量上限,具体的数值和其物态方程有关,具有一定的不确定性。而当任何简并压都抵抗不了引力的时候,最终就会形成由视界包裹的奇点,也就是黑洞。

如果存在超过质量上限的非克尔黑洞的致密天体, 那么就有两种可能的情况: 其一是对物质理论进行修正, 从而存在质量上限更大的奇异致密星; 其二是对引力理论进行修正, 从而存在带有其它额外参数的非克尔黑洞解。

2.2.2 黑洞的准正则模 黑洞无毛定理的一个重要体现就是黑洞的准正则模^[24]。黑洞的准正则模

$$\left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \varphi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \psi = 0,$$

其中 s 表示 ψ 场的自旋, 当我们考虑引力场的时候, 取值为 ± 2 。此时 ψ 表示引力场对应的纽曼-彭罗斯标量。这方程可以分离变量求解, 假设解的形式为

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left(a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - 2a\omega s \cos \theta - \frac{2ms \cos \theta}{\sin^2 \theta} - s^2 \cot^2 \theta + s + A \right) S = 0,$$

而径向部分方程为

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda \right) R = 0,$$

其中 $K = (r^2 + a^2)\omega - am$, $\lambda = A + a^2\omega^2 - 2am\omega$ 。这是一个本征值问题, 想要求解的话, 我们还要加入合适的边界条件。黑洞的视界类似一个单向的膜, 任何物质都只能落入黑洞之中, 而不能从视界中离开。而考虑到我们的宇宙是闭合的, 因此物质都只能向无穷远运动, 而不能从无穷远处进入到我们的宇宙。因此, 我们要在视界上加入向内 (in-going) 的边界条件, 而在无穷远处加入向外 (out-going) 边界条件, 就可以得到特征函数和相应的特征值 ω_{lmn} , 其中 l 和 m 是对应的角量子数, n 是能级。

一般而言, 这些特征值会是复数, 并且每一阶的取值都由克尔黑洞的质量和角动量所决定。即

$$\omega_{lmn}(M, a) = \omega_{lmn}^R(M, a) + i\omega_{lmn}^I(M, a),$$

其中实部表示振荡的频率, 而虚部在取值为负数的时候, 表现为指数衰减的形式, 其倒数表示衰

反映的是黑洞背景上的场在扰动下的响应, 每一个准正则模都是由其频率和衰减时标所刻画。通常而言, 我们讨论的场可以是标量场或矢量场等, 但是就我们目前所研究的问题而言, 主要的研究对象是引力场。对于克尔黑洞来说, 我们的求解对象是 Teukolsky 方程

$$\psi = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} S(\theta) R(r),$$

那么就可以得到角向部分是自旋加权的球谐函数, 方程形式为

减的时标 (当虚部为正时, 则是指数增长的形式, 反应了任何微扰都会被放大, 意味着黑洞是不稳定的)。当我们考虑修改引力中的黑洞解时, 一般而言, 每一阶的频率取值还会依赖于额外的参数 θ_i , 也就是

$$\omega_{lmn}(M, a, \theta_i) = \omega_{lmn}^R(M, a, \theta_i) + i\omega_{lmn}^I(M, a, \theta_i).$$

这样, 我们只要能测量出任意三个振荡频率或衰减时标, 就能够检验他们在误差范围内给出的质量与转动参数的结果是否相符合, 从而检验无毛定理是否成立。

2.2.3 黑洞的多极矩 黑洞无毛定理的另一个重要体现就是黑洞的多极矩。这在概念上类似于牛顿引力场按照球谐函数进行多极展开, 只不过是在广义相对论的情境下进行计算。在参考文献 [25-28] 中, 作者采用不同的方法分别计算了克尔黑洞的多极矩, 得出了一致的结果

$$M_l + iS_l = M (ia)^l,$$

其中 M_l 和 S_l 分别被称为质量多极矩和流多极矩, 前者在经典的情况下对应着通常的牛顿引力场的多极展开, 而后者是广义相对论中独有的概念。其中 $M_0 = M$ 是黑洞的质量, 而 $S_1 = Ma = J$ 是黑洞的角动量, $M_2 = -Ma^2 = Q$ 对应着黑洞的四极矩, 以此类推。 M_l 只有偶数阶, 一般称为质量多极矩; 而 S_l 只有奇数阶, 一般被称为流多极矩。

这一结果也是黑洞无毛定理的体现^[25], 每一阶多极矩都是由黑洞的质量和转动参数所决定。(非黑洞的致密星, 或者修改引力理论中的其它黑洞解, 一般会违反这个结果。) 比如对于中子星来说, 根据 I-Love-Q 关系, 其转动惯量、潮汐形变和四极矩之间满足一定的关系; 更一般地, 不同

的奇异致密星的多极矩理论上可以是任意值。而对于修改引力理论中的非克尔黑洞解, 一般而言会引入一些额外的参数, 从而最终得到的多极矩也会依赖于这些额外的参数, 取值与克尔黑洞有所差别。

我们对几种典型的修改引力理论中的黑洞解的多极矩进行了整理, 结果和对应的文献列于表 2, 可以看出与广义相对论中克尔黑洞的结果存在明显的区别, 而这些结果都依赖于额外引入的参数。因此, 如果我们能够精确地测量出至少三个多极矩的值, 比如最低阶的 M , J 和 Q , 那么通过分析在误差范围内是否满足 $Q = -J^2/M$, 就可以检验无毛定理是否成立。

表 2 几种修改引力理论中黑洞的多极矩
Table 2 Multipole moments for black holes in various modified theory of gravity

理论	$M_l + iS_l$	额外参数
Kerr/GR ^[25]	M	
Kerr-Newman/GR ^[25, 26]	$M(ia)^l$	q
Kerr-Newman/f(R) ^[29]	$\sqrt{M^2 - q^2}(ia)^l$	q
EdGB ^[30]	$l = 0$	M
	$l = 1$	iMa
	$l = 2$	$-M_2 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{D_1}{M^2} + \frac{q^2}{16M^2}\right)M^3$
Bumpy-Kerr ^[31]	$l = 0$	M
	$l = 1$	iMa
	$l = 2$	$-Ma^2 - \sqrt{\frac{5}{4\pi}}B_2M^3$
Kerr-NUT ^[32]	$(M - iN)(ia)^l$	N

3 利用天琴研究引力与黑洞本质

引力和黑洞的本质一直以来都是人们非常关心的问题, 因此在实验观测上对相关问题的研究也一直在进行。对于引力理论的检验目前已经在太阳系内的弱场情况下进行了不同层次的检验; 随着 LIGO 探测到双黑洞并合的引力波信号, 在强场下对引力理论的检验也有了初步的结果。目前而言, 在探测误差范围内, 尚未观察到有违反广义相对论预言的现象^[9]。对于黑洞本质的检验则要困难得多: 获得 2020 年诺贝尔物理学奖的工作是通过观测银河系中心附近恒星的轨道, 初步确认了银河系中心存在着质量约为 400 万倍太阳质量的致密天体。2019 年, 事件视界望远镜 (EHT)

通过射电干涉技术对 M87 星系中心的黑洞的阴影进行了观测成像, 但其结果对无毛定理的限制还不够理想。LIGO 利用所探测到的信号, 考虑了铃宕信号的高次谐波和双星的四极矩对旋近信号的影响来检验黑洞的本质^[9], 目前而言也还不能对黑洞模型给出足够有力的限制^[33-34]。如图 2 所示, 我们在第 2 章中已经对各种可能影响引力波波形的效应进行了介绍, 接下来我们将针对这些效应如何进行探测进行具体的分析。

一般而言, 利用引力波对引力与黑洞的本质进行检验有很多种不同的方法。从研究对象来看, 可以分成针对特定模型进行的检验, 以及对唯象模型进行的检验这两大类。从研究方法来看, 可

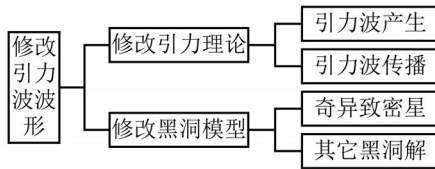


图2 影响引力波波形的效应

Fig. 2 The effects that will influence the waveform of gravitational wave

以分成测量特定参数是否为零的零检验, 以及对多个参数是否自洽的一致性检验。

针对特定模型的检验, 需要我们首先选定一个不同于广义相对论和克尔黑洞的模型, 然后在这个模型中对引力波的波形进行计算。然而存在的问题是, 可能的模型非常多, 因此对于每一种模型都进行专门的检验代价非常大。这导致我们只能选择有限的几种具有代表性的模型来进行分析。同时, 目前还没有对某个修改引力理论进行完整的引力波波形计算, 只对部分特定的情形考虑了修正。而唯象模型则是针对特定的现象, 引入理论无关的唯象参数, 比如引力波的速度、引力子的质量等。通过考虑这些现象对波形的影响, 就可以限制相应的唯象参数。

通常而言, 特定的理论通常会导致多种不同的现象, 比如某些理论中会同时存在引力子具有非零质量和引力波具有额外的偏振模式的现象; 而同一种现象也有可能多种不同的理论中出现, 比如多种不同的理论中引力子都具有非零质量。在本文中, 出于一般性的考虑, 我们将以对唯象模型的检验为主, 不会去讨论针对特定理论模型的研究。

不论是特定的理论模型, 还是唯象模型, 通常都会在广义相对论的基础上引入一些额外的参数。因此, 当这些物理参数为0的时候, 理论就会退化为广义相对论。所以通过测量这些额外参数在误差范围内是否为0, 就可以检验广义相对论是否正确。

自洽性检验主要是测量多个物理参数之间是否满足特定的关系, 比如测量得到的黑洞的各个参数所给出的质量和自旋是否一致等。因此这一检验主要用于黑洞无毛定理的检验。此外, 对于分别利用旋近波形和铃宕波形来给出最终并合后的黑洞的质量和自旋是否一致, 则是针对广义相对论的检验。不过在这种检验中, 我们可以构造

出相应的特征量 $2 \frac{M_R - M_I}{M_R + M_I}$ 和 $2 \frac{a_R - a_I}{a_R + a_I}$, 也就是两种方式给出的质量和自旋的相对偏差。当我们对数据分析的结果表明这些特征量在误差范围内为0时, 就表明广义相对论没有问题。在检验黑洞无毛定理的时候, 我们也可以尝试给出恰当的特征量, 使得无毛定理成立时特征量为零, 从而就成为了零检验。不过一般而言, 这种方法上的改变并不会影响最终的结论, 而某些情况下特征量的构造又比较困难。所以, 我们将不会就这一方面的问题进行更多的讨论。

天琴作为面向 mHz 频段的空间引力波探测器, 可以探测到各种不同类型的引力波源的信号。每一类波源的信号特点各不相同, 因此利用这些信号研究引力与黑洞本质的方法和能力也大相径庭。接下来我们将从最主要的几个方面入手, 介绍具体的研究方法和天琴预期能够达到的结果。

3.1 利用天琴研究引力本质

对引力波波形的参数化有很多种不同的方法, 最为主流的一种就是参数化后爱因斯坦方法 (ppE), 可以涵盖绝大多数的理论模型。不过 ppE 方法是在广义相对论的波形基础上进行修正, 针对的是张量偏振模式的引力波信号; 当我们试图探测引力波的额外偏振模式时, 目前的 ppE 方法并不能够适用。因此我们还需要针对额外偏振的参数化方法。接下来我们将分别就这两种方法进行介绍。

3.1.1 参数化后爱因斯坦检验 参数化后爱因斯坦方法 (ppE) 是一种针对双星并合的引力波信号的唯一参数化方法, 这个参数化方法并不关心具体理论的效应, 而是考虑其波形上振幅和相位的修正^[35]。

$$h(f) = \begin{cases} h_i^{GR}(f)(1 + \alpha u^a) e^{i\beta u^b}, & f < f_i, \\ \gamma u^c e^{i(\delta + \epsilon u)}, & f_i < f < f_M, \\ \zeta \frac{\tau}{1 + 4\pi^2 \tau^2 \kappa (f - f_i)^d}, & f_M < f, \end{cases}$$

其中 f_i 和 f_M 分别表示将旋近、并合、铃宕三个部分区分开的两个频率, 而 $u = (\pi M f)^{1/3}$ 表征了系统的速度。 $h_i^{GR}(f)$ 表示旋近阶段的引力波波形, 而 τ 和 f_i 分别表示铃宕信号领头阶的准正则模的衰减时标和频率。其它的参数都是额外引入的, 其中 $\alpha, \beta, \epsilon, \kappa, c, d$ 是唯象的修正参数, 而 a, b 代表修正引入的阶数, 剩下的 γ, δ, ζ 则是为了保证三段的波

形连续而引入的参数。

在考虑高阶模式或者其它效应的情况下, 人们还考虑了更加复杂的 ppE 模型。但是一般而言, 旋近部分的修正由于更容易与引力理论的参数建立联系, 所以具有更重要的地位。而剩下的修正参数由于缺乏比较明显的物理意义, 而且后两部分的波形本身就非常复杂, 通过上述的简单形式并不能描述的很好, 所以一般不会考虑。因此, 我们通常考虑的是更加简化的波形

$$h(f) = \begin{cases} h_I^{GR}(f)(1 + \alpha u^a) e^{i\beta u^b}, & f < f_I, \\ h_{MR}^{GR}(f), & f > f_I, \end{cases}$$

其中并合与铃宕部分的波形直接采用广义相对论的结果, 例如数值相对论波形或者 IMRPhenom 波形等。一方面是并合后的部分占整个波形的比例较少, 对检验修改引力理论的影响较小; 另一方面我们也可以只考虑旋近部分的信号进行分析。

我们可以发现, 振幅和相位修正的阶数是 u 的幂次, 因此对于各种修改引力理论, 我们可以考虑其旋近阶段的后牛顿波形, 并将其领头阶的修正与唯象参数建立联系。一般而言, 振幅和相位的领头阶修正在同一后牛顿阶, 他们与后牛顿阶数的关系是 $a = b + 5 = 2\text{PN}$ 。在表 3 中, 我们给出了几种典型的修改引力的领头阶修正的阶数^[36]。而唯象参数与理论参数的关系可以参见文献^[36], 我们这里不再赘述。

表 3 几种修改引力理论中 ppE 修正的阶数

Table 3 Order for ppE corrections in various modified theory of gravity

引力理论	a	b	PN
标量-张量理论	-2	-7	-1
动力学陈-西蒙斯理论	4	-1	2
引力子质量	2	-3	1
大尺度额外维	-8	-13	-4

天琴预期能够在五年的运行周期内观测到上百例大质量双黑洞^[37]和十几例恒星质量双黑洞^[38]的旋近信号, 并且能够以很高的精度对其进行参数估计^[39]。

对于天琴来说, 我们结合所能探测到的各类双黑洞信号进行了分析, 发现天琴对总质量约为一百万倍太阳质量的双黑洞系统, 可以给出对 ppE 参数最好的限制。同时, 对于低阶的 ppE 修正的限制能力也优于高阶的部分。通常而言, 引力波对

相位比对振幅更加敏感, 因此对相位参数的限制能力也远好于振幅参数; 同时考虑振幅与相位的修正与只考虑相位修正相比, 在映射到具体的理论参数后并没有太大的差别, 也就是相位的影响在这里是主要因素。

3.1.2 探测引力波的额外偏振模式 如上文所述, 广义相对论中, 引力波只存在+和×两种偏振模式; 而在各种修改引力理论中, 由于与额外引入的场的耦合等原因, 可能激发出额外的四种偏振模式。因此, 如果我们能够探测到这些额外的偏振模式, 就能够说明广义相对论并非正确的引力理论, 而是需要进行修正的。

引力波信号具有额外偏振模式意味着在空间上具有更多的自由度。如果额外偏振存在, 则引力波至少拥有三个方向上的振动自由度。而当前地面和空间探测引力波的主要方法是激光干涉, 即通过迈克尔逊干涉仪测量两个臂长差的变化。对于固定的单个干涉仪来说, 从各个方向传来的任何偏振形式的引力波都会投影到探测器的两个臂所构成的平面上。因此不同偏振的引力波所产生的信号是简并的, 无法通过观测加以区分。这一点也可以通过自由度的分析得到: 要探测出多个偏振模式, 就得至少具有相应数量的独立的探测自由度, 而一个迈克尔逊干涉仪在同一时刻只能提供一个自由度。因此要想实现对引力波额外偏振模式的探测, 主要有以下两种构造多个探测器自由度的方法:

一是通过建造多个探测器来实现对引力波额外偏振模式的探测。三个以上的探测器联合探测, 就可以分辨探测到的引力波中是否包含有额外的偏振模式。根据不同探测器的指向, 以及引力波源的方位, 就可以用各个探测器的数据组合构造出不含有张量偏振的数据^[40-41]。在此基础上, 我们就可以分析数据, 确认是否存在额外的偏振模式。这是目前地面探测器主要采用的方法, 而联合多个空间探测器也可以实现额外偏振模式的探测。

二是借助探测器的运动来实现对额外偏振模式的探测。在只有一个探测器的情况下, 如果引力波信号波形已知且持续时间足够长, 那么就可以借助探测器的运动在不同的时刻构造出不同的自由度, 从而实现对额外偏振模式的探测。地面探测器频段内最主要的双黑洞和双中子星的引力波信号持续时间都非常短, 探测器在对应时间段

内的运动可以忽略, 因此并不能通过这种方式来探测额外偏振模式。只有持续时间很长的非球对称的中子星高速自转所产生的单频引力波信号(通常被称为连续引力波信号), 才能用这种方式探测其额外偏振模式^[42]。对于空间探测器来说, 其频段内的源普遍都能持续很长的时间, 因此可以用这种方法来探测其额外偏振模式^[43]。

对于天琴来说, 双白矮星系统是其频段内数量最多的源, 预期我们可以观测到近万个不同的双白矮星信号^[44]。其引力波频率几乎保持不变, 因此可以不用考虑额外偏振模式对频率演化的影响。直接采用额外偏振模式振幅与张量模式的振幅之比作为待测的参数, 如果测量到振幅在误差范围内为零, 就可以认为没有额外偏振模式。我们的分析结果显示, 对额外偏振的测量能力强烈依赖于源的位置, 对于探测器正对着的 J0806 双白矮星系统来说, 几乎无法对其额外偏振模式进行测量, 但是对于其它位置的双白矮星, 最好的可以达到千分之一的精度。而考虑天琴双星座构型或者与 LISA 联合观测, 就可以有效地实现对全天的源都进行精度较高的观测。

3.2 利用天琴研究黑洞本质

在第二章中我们已经介绍过, 研究黑洞本质就是在检验黑洞是否是广义相对论中所预言的克尔黑洞。无毛定理的条件之一, 就是孤立解, 也就意味着只有在致密天体周围没有其它大质量天体或其它物质的影响时, 我们判断它是否是克尔黑洞才有意义。满足这个条件的引力波源, 就是双黑洞并合后形成的单个黑洞, 以及极端质量比系统中可以将小天体看做微扰的中心大质量黑洞。我们将分别从这两方面介绍天琴如何利用它们的引力波来检验无毛定理。

3.2.1 利用双黑洞并合的铃宕信号检验无毛定理

如前文所述, 双黑洞的并合一般可以被分成三个阶段: 旋近、并合、铃宕。其中在铃宕阶段, 两个黑洞刚刚并合为一个整体, 但是还没有稳定下来, 处于剧烈的振荡中。通过铃宕部分的辐射, 可以将不稳定的时空退化为一个稳态的克尔黑洞。而这部分辐射则是由这个克尔黑洞所对应的准正则模叠加构成。一般而言, 铃宕部分的信号可以写为

$$h(t) = \sum_{l,m} A_{lm} Y^{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega_{lm}t} e^{-\frac{t}{\tau_{lm}}},$$

其中 ω_{lm} 表示 lm 模的实部, τ_{lm} 表示 lm 模的虚部的倒数。一般而言, 次领头阶的模式衰减极快, 因

此可以忽略, 从而只考虑 $n=0$ 的模式, 并略去指标 n 。一般而言, 22 模是铃宕信号中的主导模式, 而 33 模和 21 模强度相近且弱于 22 模, 44 模则要更弱一些, 更高阶的模式则可以忽略。

对于准正则模的参数化, 我们可以针对具体的理论进行分析, 如参考文献 [45] 中对 STVG 理论的研究。也可以直接引入对频率参数的修正, 考虑

$$\begin{aligned}\omega_{lm} &= \omega_{lm}^{GR}(M, a) + \delta\omega_{lm}, \\ \tau_{lm} &= \tau_{lm}^{GR}(M, a) + \delta\tau_{lm}.\end{aligned}$$

因此, 对频率修正的测量精度进行分析就可以得出检验无毛定理的能力。

对于天琴来说, 我们计算发现^[46], 对于约一百万倍太阳质量的黑洞, 对这些频率修正的测量精度最高。同时, 利用 22 模的频率和衰减时标以及 33 模的频率这三个参数, 我们可以给出最好的限制, 频率的相对测量精度分别可以达到千分之一的量级。而天琴与 LISA 进行联合观测时, 可以使测量精度得到显著提升。此外, 结合不同的大质量黑洞的天文学模型, 我们分析了当观测到大量不同的铃宕信号时对最终结果的提升。结果显示, 对于重种子黑洞模型, 我们预期可以得到更加精确的限制。

3.2.2 利用极端质量比旋近信号检验无毛定理

在极端质量比旋近过程中, 小天体会在大质量黑洞的视界附近绕转上万圈, 因此辐射出的引力波也携带着关于大质量黑洞附近的时空结构的极为丰富的信息。因此利用极端质量比旋近信号, 就可以测量中心黑洞的质量、自旋和四极矩, 从而检验无毛定理。

当前对于 EMRI 过程的波形计算还并不成熟, 一方面是精度不足, 另一方面是速度太慢。此外, 对于自力效应和小天体的自转的影响等因素的考虑也尚不完善。而在极端质量比系统中, 由于小天体可被看作微扰, 因此这些因素对波形的影响也将变得可观, 因此不能简单地加以忽略。

目前而言, 绝大多数波形都是针对广义相对论下进行的计算。对于修改引力理论下的 EMRI 波形, 目前虽然也有一些讨论, 但是在广义相对论的波形都不够精确的情况下, 很难分辨探测到的偏离到底是引力理论有问题, 还是波形不精确导致的。不过目前而言, 出于探测能力分析的角度, 在目前尚不精确的波形上进行修正, 得到的结果预期不会有量级上的差异。AK 波形是目前而言使用最为广泛的 EMRI 波形, 它基于后牛顿波形, 整

合各种效应, 可以快速地生成 EMRI 波形。虽然波形本身不够精确, 但是已经具有了 EMRI 波形的主要特征。

对于天琴, 我们基于考虑四极矩修正的 AK 波形分析了对四极矩的测量能力, 发现对于一般的 EMRI 系统而言, 我们对四极矩参数的测量精度可以达到约 10^{-6} 的量级。同时我们还发现波形截止频率的选择会对最终结果有较大的影响: 考虑史瓦西截断时, 探测精度主要受质量影响; 而考虑克尔截断时, 探测精度则主要受大黑洞自旋的影响。同时, 结合不同的天文学模型, 我们也得出了多个事件对四极矩参数的联合限制能力^[47]。此外, 我们还结合更加精确的 AAK 波形, 考虑四极矩的影响得到了 QAAK 波形^[48]。利用这一波形的计算结果与 QAK 波形的结果比较发现, 两种波形给出的对四极矩的测量精度并没有显著差别。这也证明了如前所述的目前波形精度对探测能力分析并不会有太大影响的结论。

4 总 结

时空的本性是人们想要探究的最为重要的基

础问题之一。而广义相对论作为研究时空几何结构的引力理论, 自然也有着非常重要的地位。黑洞作为广义相对论最简单的解, 也就成为了广义相对论中最重要的研究对象。而引力波作为时空的涟漪, 则是我们用于研究这些基础问题不可或缺的探测手段。

广义相对论与黑洞理论存在着多种可能的替代理论。而通过探测引力波信号并对其进行分析, 可以研究引力和黑洞的本质。天琴作为针对毫赫兹频段的空间引力波探测计划, 预期将能够探测到大量不同类型的引力波信号。而利用这些信号, 我们可以从不同的角度对引力和黑洞的本质进行各种可能的研究。

我们已经就几个最为主要的方面对天琴预期的探测能力进行了分析。之后我们一方面将对这些分析进行细化, 考虑更加具体和真实的情况进行计算, 并对目前尚未考虑的其它可能的研究引力与黑洞本质的方法进行分析; 另一方面, 将逐步开展数据分析软件的构建, 为将来实际探测到信号后所必需的数据分析提供必要的工具。

参考文献:

- [1] ABBOTT B P, LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger[J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(6): 061102.
- [2] ABBOTT B P, ABBOTT R, ABBOTT T D, et al (LIGO scientific collaboration and Virgo collaboration). GWTC-1: a gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by LIGO and Virgo during the first and second observing runs[J]. *Physical Review X*, 2019, 9(3): 031040.
- [3] ABBOTT B P, ABBOTT T D, ABRAHAM S, et al (LIGO scientific collaboration and Virgo collaboration). GWTC-2: compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the first half of the third observing run [EB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2010.14527>.
- [4] ARZOUMANIAN Z, BAKER P T, BLUMER H, et al (The NANOGrav collaboration). The NANOGrav 12.5-year data set: search for an isotropic stochastic gravitational-wave background [EB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2009.04496>.
- [5] AMARO-SEOANE P, AUDLEY H, BABAK S, et al (LISA Collaboration). Laser interferometer space antenna [EB/OL]. <http://arxiv.org/abs/1702.00786>.
- [6] SATO S, KAWAMURA S, ANDO M, et al. The status of DECIGO [C]//*Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing, 2017, 840(1): 012010.
- [7] HU Y M, MEI J W, LUO J. Science prospects for spaceborne gravitational-wave missions[J]. *National Science Review*, 2017, 4(5): 683-684.
- [8] ABBOTT B P, ABBOTT T D, ABRAHAM S, et al (LIGO scientific Collaboration and Virgo Collaboration). Tests of general relativity with the binary black hole signals from the LIGO-Virgo catalog GWTC-1 [J]. *Physical Review D*, 2019, 100(10): 104036.
- [9] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, ABBOTT R, et al. Tests of general relativity with binary black holes from the second LIGO-Virgo Gravitational-Wave Transient Catalog [EB/OL]. <http://arxiv.org/abs/2010.14529>.
- [10] LOVELOCK D. The Einstein tensor and its generaliza-

- tions [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1971, 12 (3): 498–501.
- [11] CLIFTON T, FERREIRA P G, PADILLA A, et al. Modified gravity and cosmology [J]. *Physics Reports*, 2012, 513(1–3): 1–189.
- [12] WILL C M. The confrontation between general relativity and experiment [J]. *Living Reviews in Relativity*, 2014, 17(1): 4.
- [13] GONG Y G, HOU S Q. Gravitational wave polarizations in $f(R)$ gravity and scalar–tensor theory [C]// EPJ Web of Conferences. EDP Sciences, 2018, 168: 01003.
- [14] KAUSAR H R, PHILIPPOZ L, JETZER P. Gravitational wave polarization modes in $f(R)$ theories [J]. *Physical Review D*, 2016, 93(12): 124071.
- [15] MAGGIORE M, NICOLIS A. Detection strategies for scalar gravitational waves with interferometers and resonant spheres [J]. *Physical Review D*, 2000, 62(2): 024004.
- [16] CAPOZZIELLO S, CORDA C. Scalar gravitational waves from scalar–tensor gravity: production and response of interferometers [J]. *International Journal of Modern Physics D*, 2006, 15(7): 1119–1150.
- [17] BLAS D, SANCTUARY H. Gravitational radiation in Hořava gravity [J]. *Physical Review D*, 2011, 84(6): 064004.
- [18] HOU S Q, GONG Y G, LIU Y Q. Polarizations of gravitational waves in Horndeski theory [J]. *The European Physical Journal C*, 2018, 78(5): 378.
- [19] JACOBSON T, MATTINGLY D. Gravity with a dynamical preferred frame [J]. *Physical Review D*, 2001, 64: 024028.
- [20] GONG Y, HOU S, LIANG D. Gravitational waves in Einstein–æther and generalized TeVeS theory after GW170817 [J]. *Physical Review D*, 2010, 97: 084040.
- [21] SAGI E. Propagation of gravitational waves in the generalized tensor–vector–scalar theory [J]. *Physical Review D*, 2010, 81(6): 064031.
- [22] DE PAULA W L S, MIRANDA O D, MARINHO R M. Polarization states of gravitational waves with a massive graviton [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2004, 21 (19): 4595.
- [23] WILL C M. Bounding the mass of the graviton using gravitational–wave observations of inspiralling compact binaries [J]. *Physical Review D*, 1998, 57(4): 2061.
- [24] CARDOSO V, GUALTIERI L. Testing the black hole ‘no–hair’ hypothesis [J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2016, 33(17): 174001.
- [25] GEROCH R. MULTIPOLE M. II. Curved space [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1970, 11(8): 2580–2588.
- [26] HANSEN R O. Multipole moments of stationary spacetimes [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1974, 15 (1): 46–52.
- [27] THORNE K S. Gravitational–wave research: current status and future prospects [J]. *Reviews of Modern Physics*, 1980, 52(2): 285.
- [28] GÜRSEL Y. Multipole moments for stationary systems: the equivalence of the Geroch–Hansen formulation and the Thorne formulation [J]. *General Relativity and Gravitation*, 1983, 15(8): 737–754.
- [29] SUVOROV A G, MELATOS A. Testing modified gravity and no–hair relations for the Kerr–Newman metric through quasiperiodic oscillations of galactic microquasars [J]. *Physical Review D*, 2016, 93(2): 024004.
- [30] KLEIHAUS B, KUNZ J, MOJICA S. Quadrupole moments of rapidly rotating compact objects in dilatonic Einstein–Gauss–Bonnet theory [J]. *Physical Review D*, 2014, 90(6): 061501.
- [31] VIGELAND S J. Multipole moments of bumpy black holes [J]. *Physical Review D*, 2010, 82 (10): 104041.
- [32] MUKHERJEE S, CHAKRABORTY S. Multipole moments of compact objects with NUT charge: theoretical and observational implications [EB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2008.06891>, 2020.
- [33] ABBOTT B P, LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, et al. Tests of general relativity with GW150914 [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116 (22): 221101.
- [34] ABBOTT B P, LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, et al. Binary black hole mergers in the first advanced LIGO observing run [J]. *Physical Review X*, 2016, 6(4): 041015.
- [35] YUNES N, PRETORIUS F. Fundamental theoretical

- bias in gravitational wave astrophysics and the parametrized post-Einsteinian framework [J]. *Physical Review D*, 2009, 80(12): 122003.
- [36] CHAMBERLAIN K, YUNES N. Theoretical physics implications of gravitational wave observation with future detectors [J]. *Physical Review D*, 2017, 96(8): 084039.
- [37] WANG H T, JIANG Z, SESANA A, et al. Science with the TianQin observatory: preliminary results on massive black hole binaries [J]. *Physical Review D*, 2019, 100(4): 043003.
- [38] LIU S, HU Y M, ZHANG J D, et al. Science with the TianQin observatory: preliminary results on stellar-mass binary black holes [J]. *Physical Review D*, 2020, 101(10): 103027.
- [39] FENG W F, WANG H T, HU X C, et al. Preliminary study on parameter estimation accuracy of supermassive black hole binary inspirals for TianQin [J]. *Physical Review D*, 2019, 99(12): 123002.
- [40] HAGIHARA Y, ERA N, IKAWA D, et al. Probing gravitational wave polarizations with Advanced LIGO, Advanced Virgo, and KAGRA [J]. *Physical Review D*, 2018, 98(6): 064035.
- [41] NISHIZAWA A, TARUYA A, HAYAMA K, et al. Probing nontensorial polarizations of stochastic gravitational-wave backgrounds with ground-based laser interferometers [J]. *Physical Review D*, 2009, 79(8): 082002.
- [42] ISI M, WEINSTEIN A J, MEAD C, et al. Detecting beyond-Einstein polarizations of continuous gravitational waves [J]. *Physical Review D*, 2015, 91(8): 082002.
- [43] PHILIPPOZ L, JETZER P. Detecting additional polarization modes with LISA [C]// *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, 840: 012057.
- [44] HUANG S J, HU Y M, KOROL V, et al. Science with the TianQin observatory: preliminary results on galactic double white dwarf binaries [J]. *Physical Review D*, 2020, 102(6): 063021.
- [45] BAO J H, SHI C F, WANG H T, et al. Constraining modified gravity with ringdown signals: An explicit example [J]. *Physical Review D*, 2019, 100(8): 084024.
- [46] SHI C F, BAO J H, WANG H T, et al. Science with the TianQin observatory: preliminary results on testing the no-hair theorem with ringdown signals [J]. *Physical Review D*, 2019, 100(4): 044036.
- [47] FAN H M, HU Y M, BARAUSSE E, et al. Science with the TianQin observatory: preliminary result on extreme-mass-ratio inspirals [J]. *Physical Review D*, 2020, 102(6): 063016.
- [48] LIU M X, ZHANG J D. Augmented analytic kludge waveform with quadrupole moment correction [EB/OL]. <https://arxiv.org/abs/2008.11396>.

(责任编辑 王海蓉)